Lista nr 1 z Robotyki 1

Proszę przypomnieć podstawowe informacje z rachunku wektorowego i macierzowego oraz z analizy matematycznej (pochodne), które będą potrzebne w dalszych zajęciach. Wektory zawsze są pisane kolumnowo i są trójwymiarowe.

1. Pokazać, że iloczyn skalarny dwóch wektorów można w równoważny sposób zapisać jako $< a, b > = a^T b = b^T a = \mathrm{tr}(ab^T)$. Symbol tr oznacza ślad macierzy, czyli sumę elementów na przekątnej macierzy prostokątnej.
2. Pokazać, że długość wektora $\| a \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ jest równa $\sqrt{< a, a >}$.
3. Pokazać własności iloczynu skalarnego $< a, b > = < b, a >$ oraz $< ka, b > = k < a, b >$.
4. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów a i b wylicza się następująco:
$$a \times b = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$
$$= i(a_2 b_3 - a_3 b_2) - j(a_1 b_3 - a_3 b_1) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$
Pokazać własności iloczynu wektorowego $a \times b = -b \times a$ oraz $(ka) \times b = k(a \times b)$.
5. Pokazać, że każdy wektor definiujący iloczyn wektorowy, czyli a i b, jest prostopadły (ortogonalny) do tego iloczynu $a \times b$.
6. Wyprowadzić postać macierzy skośnie symetrycznej A wymiaru 3×3 spełniającej warunek $a \times b = Ab$. Macierz skośnie symetryczna spełnia równanie
$$A + A^T = 0.$$
Czy otrzymana macierz A spełnia powyższe równanie?
7. Policzyć pochodne $\frac{\partial f}{\partial q}$ funkcji wielu zmiennych:
   (a) $f(q_1, q_2) = 11 \sin^2(q_2^2 + q_1 q_2) - \ln q_1 \cos(3q_2 + 1)$
   (b) $f(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}\ q_1 + q_2^4 q_1^2 \\ \mathrm{arc\ tg}(q_1 + 2q_2) + 5q_1 \end{bmatrix}$
   (c) $f(q_1, q_2, q_3) = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}^2\ q_3 + q_2^4 q_1^2 \\ \mathrm{arc\ tg}(q_1 + 2q_2 + q_3) + 5q_1 \end{bmatrix}$
8. Policzyć pochodną po czasie $\frac{df}{dt}$ funkcji złożonej
$$f(q_1(t), q_2(t)) = 7 \sin^2 q_1 + q_1 q_2^2.$$