

Lista nr 2 z Robotyki 1

Począwszy od tej listy, pojawiają się zadania dodatkowe oznaczone (\star). Nie będą one rozwiązywane w trakcie zajęć, jednak ich rozwiązanie pozwoli na uzyskanie plusów z aktywności.

1. Mając podaną macierz R ,

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

należy sprawdzić, czy zachodzą warunki

$$R^T R = I_3, \quad R R^T = I_3, \quad \det R = 1.$$

Jeśli tak, to co można powiedzieć o macierzy R ?

2. Prawoskrętny układ współrzędnych jest zbudowany z wersorów i , j i k w podanej kolejności. W pewnym układzie dany jest wersor $i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)^T$, zaś wersor $k = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T$. Wyliczyć wersor j . Zwrócić uwagę na kolejność elementów w iloczynie wektorowym.
3. Mamy dwa układy współrzędnych zaczepione w jednym punkcie. Wersory układów są równe: $i_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, $j_0 = (0, 1, 0)^T$, $k_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$ oraz $i_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)^T$, $j_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T$, $k_1 = (0, 0, -1)^T$. Należy sprawdzić, czy układy są prawoskrętne, a jeśli nie, to nieznacznie poprawić wersory, aby uzyskać prawoskrętność. Dla skorygowanych układów prawoskrętnych należy wyznaczyć macierz obrotu R_0^1 przekształcającą współrzędne z układu 1 do 0. Z kolei, należy wyznaczyć współrzędne pewnego punktu względem układu 1, gdy dane są jego współrzędne względem układu 0, czyli $p_0 = (1, 1, 1)^T$.
4. Macierze bazowe dla grupy obrotów $SO(3)$ to elementarne obroty względem osi głównych, czyli

$$\text{rot}(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix}, \quad \text{rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}, \quad \text{rot}(z, \psi) = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokazać na konkretnym przykładzie (wykorzystując ogólną postać macierzy bazowych), że mnożenie macierzy obrotu względem różnych osi jest nieprzemienne, zaś względem tej samej osi – jest przemienne.

5. Wyznaczyć ogólną macierz reprezentacji dla kątów Roll-Pitch-Yaw (Kołysanie-Kiwanie-Myszkowanie)

$$RPY(\alpha, \beta, \gamma) = \text{rot}(z, \alpha) \cdot \text{rot}(y, \beta) \cdot \text{rot}(x, \gamma)$$

6. Mając macierz reprezentacji RPY , wyznaczyć macierz obrotu odpowiadającą reprezentacji

$$R = RPY\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0\right)$$

7. Dla macierzy podanej wzorem (1) znaleźć reprezentację kątów RPY oraz kątów Eulera.
8. (\star) Czy macierz obrotu ma zawsze jednoznaczną konkretną reprezentację? Czy można podać prosty przykład ilustrujący odpowiedź na to pytanie?
9. (\star) Wiedząc, że każda macierz obrotu

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$$

spełnia następujące warunki:

$$\|r_1\| = \|r_2\| = \|r_3\| = 1$$

$$r_1 \times r_2 = r_3, \quad r_2 \times r_3 = r_1, \quad r_3 \times r_1 = r_2,$$

pokazać, że wyznacznik macierzy obrotu jest równy 1.