Lista nr 3 z Robotyki 1

1. W parametryzacji oś-kąt (v, θ) macierz obrotu wylicza się z formuły Rodrigueza jako
$$R(v, \theta) = I_3 + [v] \sin\theta + (1 - \cos\theta)[v]^2 \tag{1}$$
Pokazać, że $R(v, \theta) = R(-v, -\theta)$, czyli że reprezentacja oś-kąt nie jest jednoznaczna.

2. Uzasadnić, że $R^{-1} = R^T = R(v, -\theta)$.

3. Pokazać, że oś obrotu w reprezentacji oś-kąt dla macierzy R uzyskuje się ze wzoru
$$[v] = \frac{R - R^T}{2\sin\theta}$$

4. Korzystając ze wzoru podanego na wykładzie wyliczyć macierz obrotu wokół wektora $w = (1, 1, 1)^T$ o kąt $\frac{\pi}{3}$.
Wskazówka: najpierw unormować wektor w do długości 1, a następnie przeprowadzić obliczenia.

5. Macierze jednorodne mają postać blokową
$$K = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Korzystając z ogólnej postaci poszczególnych transformacji pokazać na przykładzie, że składanie ruchów względem różnych osi bazowych nie jest przemienne.

6. Dla jakich sytuacji składanie translacji z obrotem względem wybranych osi jest przemienne?

7. Wyliczyć symbolicznie postać macierzy K^{-1}.

8. Niech będzie dana macierz $R = rot(z, \phi)$. Policzyć $\frac{\partial R}{\partial \phi}$, a wynik zapisać w postaci AR. Wyrazić macierz A jako macierz skośnie symetryczną zbudowaną z wektora elementarnego $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$ lub $e_3 = (0, 0, 1)^T$. Podobne różniczkowania należy przeprowadzić dla macierzy $rot(x, \alpha)$ oraz $rot(y, \beta)$.

9. Prędkości obrotowe w przestrzeni/ciele ω_S/ω_B definiujemy następująco:
$$[\omega_S] = \Omega_S = \dot{R}R^T \qquad [\omega_B] = \Omega_B = R^T\dot{R}.$$
Załóżmy, że macierz obrotu R jest przedstawiona w parametryzacji $R = RPY(\phi, \theta, \psi)$. Wyliczyć prędkość obrotową ω_S oraz ω_B jako funkcję kątów ϕ, θ, ψ oraz ich pochodnych. Wynik przedstawić w postaci $\omega_S = W_{3\times3}(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})^T$, gdzie W jest macierzą zawierającą funkcje trygonometryczne kątów parametryzacji.

10. ($\star$) Korzystając z formuły Rodrigueza (1) pokazać, że
$$\mathrm{tr}\ R(v, \theta) = 1 + 2\cos\theta$$

11. ($\star$) Pokazać, że formuła Rodrigueza daje równoważny opis dla macierzy $R(v, \theta)$ (gdzie $v = (c_\alpha s_\beta, s_\alpha s_\beta, c_\beta)$ jest wektorem jednostkowym) do zapisu
$$R = rot(z, \alpha)rot(y, \beta)rot(z, \theta)rot(y, -\beta)rot(z, -\alpha)$$